# Über die Bilder bewegter Objekte und die Unsichtbarkeit der Lorentz-Kontraktion

JOACHIM SCHRÖTER

Institut für Theoretische Physik (I) der Philipps-Universität Marburg (Lahn)

(Z. Naturforschg. **21 a**, 669—679 [1966]; eingegangen am 19. Januar 1966)

In the literature concerning the appearent shapes of moving objects different methods are used. It is the aim of this paper to give a unique simple concept to treat such problems. The method used is a formal one: General definitions of the pictures taken with a plate camera or a spherical one (e. g. the eye) are given explicitely in different LORENTZ frames. The gained pictures are exactly distinct ones. On this basis some examples are treated, and the theorem concerning the appearent rotation of small objects being observed with the eye or a spherical camera (which is due to TERRELL and WEISSKOPF) is reformulated. It is shown that the LORENTZ contraction in the popular sense can be visualized only with a plate camera for sufficiently small objects in one special position of the moving object.

Seit dem Entstehen der Relativitätstheorie wurde allgemein stillschweigend angenommen, daß die LORENTZ-Kontraktion auch sichtbar sei, d. h., daß ein schnell fliegendes Objekt in Längsrichtung gestaucht erscheint. Diese Meinung hat sich in zahlreichen populären Büchern niedergeschlagen, vielleicht am eindrucksvollsten in dem Buch von GAMOW [1] "*Mr. Tompkins in Wonderland*". Erst im Jahre 1959, also rund 50 Jahre nach Entstehung der Relativitätstheorie, wurde durch eine Arbeit von PENROSE [2] und in allgemeinerer Form durch eine Arbeit von TERRELL [3] gezeigt, daß zumindest für hinreichend kleine, schnell bewegte Objekte keine Verzerrung sichtbar ist, also auch keine, die als LORENTZ-Kontraktion gedeutet werden könnte. WEISSKOPF [4] leitete 1960 das gleiche Ergebnis mit anderen Methoden ab. Die in den genannten Arbeiten diskutierten Beispiele kleiner Objekte zeigen ein scheinbar paradoxes Ergebnis: Gerade wegen der Existenz der LORENTZ-Kontraktion ist überhaupt keine Verzerrung, also auch keine LORENTZ-Kontraktion, sichtbar. Nach der klassischen Mechanik hingegen ergeben sich Verzerrungen (vgl. dazu die Beispiele in [4]). Jedoch besteht zwischen der Behauptung von TERRELL und der von WEISSKOPF insofern eine Diskrepanz, als WEISSKOPF bewies, daß koinzidierende Beobachter in verschiedenen LORENTZ-Systemen gleiche Bilder sehen, während TERRELL zeigte, daß die Bilder nur ähnlich sind. Eins der Ziele dieser Arbeit ist die Klärung dieses scheinbaren Widerspruchs.

Ebenfalls 1960 diskutierte RANNINGER [5] an einem Beispiel kleiner linearer Objekte, wie die LORENTZ-Kontraktion mit einer Plattenkamera sichtbar gemacht werden könnte. Diese Arbeit zeigt, daß das Sichtbarwerden der LORENTZ-Kontraktion stark von dem verwendeten Aufnahmegerät abhängt (vgl. [6]). In den Arbeiten [2–4] wurde einheitlich das Auge oder eine Kugelkamera als Rezeptor angesehen. In weiteren Arbeiten (in [7] für die Kugelkamera, in [8] für die Plattenkamera) wurden Beispiele für die Bilder auch großer Objekte angegeben.

In allen bisher genannten Arbeiten wurden die betrachteten Objekte als selbstleuchtend, bzw. dauernd beleuchtet, vorausgesetzt. Auf die Möglichkeit, mit Radarbeobachtung die LORENTZ-Kontraktion sichtbar zu machen, wies GAMOW [9] hin, und SHERWIN [10] zeigte an einem Beispiel, daß die LORENTZ-Kontraktion mit einer Radarapparatur sichtbar gemacht werden kann.

In der vorliegenden Arbeit wird nun versucht, eine einheitliche Basis anzugeben, aus der u. a. die bekannten speziellen Ergebnisse auf einem formalen Wege hergeleitet werden können und von der aus auch kompliziertere Fälle behandelt werden können.

## 1. Der Begriff des Bildes

### *1.1. Bezeichnungen*

Gegeben sei ein LORENTZ-System $S$, und alle Koordinaten $x_l$, $t$, $X_l$, $T$ usw., die in diesem Ab-

[1] G. GAMOW, Mr. Tompkins in Wonderland, Cambridge Univ. Press, Cambridge 1940.
[2] R. PENROSE, Proc. Cambr. Phil. Soc. **55**, 137 [1959].
[3] J. TERRELL, Phys. Rev. **116**, 1041 [1959].
[4] V. WEISSKOPF, Lectures in theoretical Physics, Vol. III, p. 54, Boulder 1960, W. E. BRITTIN, B. W. and J. DOWNS (ed.), New York, London 1961.
[5] J. RANNINGER, Acta Phys. Austr. **14**, 50 [1960].
[6] S. KICHENASSAMY, C. R. Acad. Sci. Paris **260**, 1581 [1965].
[7] MARY L. BOAS, Am. J. Phys. **29**, 283 [1961].
[8] R. WEINSTEIN, Am. J. Phys. **28**, 607 [1960].
[9] G. GAMOW, Proc. Nat. Acad. Sc. **47**, 728 [1961].
[10] C. W. SHERWIN, Am. J. Phys. **29**, 67 [1961].

schnitt auftreten, beziehen sich immer auf $S$. Zur Abkürzung wird $(x_1, x_2, x_3, t) = x$ gesetzt. Ferner sei ein Körper $\Sigma$ gegeben, der irgendein Kontinuum sein kann, der aber auch aus diskreten Punkten bestehen kann. In jedem Falle werden die Punkte des Körpers, auch Teilchen genannt, als eineindeutig indiziert gedacht durch $\varkappa \in J$. Die Weltlinie eines Teilchens $\varkappa$ ist dann eine Menge $W(\varkappa)$ von Quadrupeln $x$ mit

$$W(\varkappa) = \{x \mid x_l = \alpha_l(t \mid \varkappa)\}, \tag{1}$$

wobei $\alpha_l$ eine Lösung der Bewegungsgleichungen ist. Als Weltlinie von $\Sigma$ wird die Menge $W(J) = \bigcup_{\varkappa \in J} W(\varkappa)$ bezeichnet.

Über den Körper $\Sigma$ wird jetzt vorausgesetzt, daß jedes seiner Teilchen $\varkappa$ während eines von $\varkappa$ abhängigen Zeitintervalls $\tau_{\mathrm{E}}(\varkappa)$ Licht nach allen Seiten aussenden kann. Es ist dabei auch zugelassen, daß dieses Zeintintervall für gewisse $\varkappa$ leer ist. Der lichtaussendende Teil von $W(\varkappa)$ wird mit $W_{\mathrm{E}}(\varkappa)$ bezeichnet und der entsprechende Teil von $W(J)$ mit $W_{\mathrm{E}}$. Weiter wird vorausgesetzt, daß jedes Teilchen $\varkappa$ während eines Zeitintervalls $\tau_{\mathrm{A}}(\varkappa)$ alle auftreffenden Lichtimpulse absorbieren kann, wobei wieder zugelassen ist, daß $\tau_{\mathrm{A}}(\varkappa)$ leer ist. Analog zu oben wird der absorbierende Teil von $W(\varkappa)$ mit $W_{\mathrm{A}}(\varkappa)$ bezeichnet, und der entsprechende Teil von $W(J)$ mit $W_{\mathrm{A}}$. Es wird zugelassen, daß ein Teilchen einen Lichtimpuls emittiert, während es gleichzeitig einen anderen absorbiert.

Als Beispiel eines Körpers, dessen Emissions- und Absorptionsverhältnisse durch Mengen $W_{\mathrm{E}}$ und $W_{\mathrm{A}}$ beschrieben werden, kann man sich etwa einen rauhen Körper denken, der mit einer Blitzlichtlampe beleuchtet wird oder der mit Radarimpulsen bestrahlt wird. Ein anderes Beispiel ist ein selbstleuchtender, undurchsichtiger Körper. Ist $J_{\mathrm{E}}$ die Menge der leuchtenden Oberflächenteilchen und $J_{\mathrm{A}} = J$ die Menge der absorbierenden Teilchen, so ist in diesem Falle $W_{\mathrm{E}} = W(J_{\mathrm{E}})$ und $W_{\mathrm{A}} = W(J)$.

### *1.2. Das visuelle momentane Bild*

Unter dem Begriff „visuelles Bild“ soll das mit dem Auge wahrgenommene Bild verstanden werden. Das Auge wird in den folgenden Betrachtungen immer aufgefaßt als Lochkamera mit (halb-)kugelförmigem Rezeptor. Diese Vorstellung ist zwar eine Vergröberung der tatsächlichen Verhältnisse, genügt aber für die weiteren Überlegungen. Umgekehrt kann also auch das visuelle Bild mit einer Kugelkamera mit sehr kleiner Öffnung photographiert werden. Das visuelle Momentbild entsteht nun durch eine Menge von Lichtimpulsen, die, aus verschiedenen Richtungen kommend, gleichzeitig die Öffnung der Lochkamera passieren. (Sie erreichen dann auch gleichzeitig den Rezeptor.) Da es für den Sinneseindruck gleichgültig ist, von welchem Ort der Lichtimpuls herrührt, sondern da es nur auf die Richtung des Lichtimpulses ankommt, kann man das visuelle Bild definieren als eine Teilmenge $B_{\mathrm{v}}$ der Einheitskugel, die man sich als Menge von Winkelpaaren $(\Theta, \Phi)$ gegeben denkt. Würde man nun statt der Kugelkamera eine Lochkamera mit ebenem Rezeptor verwenden, so wäre natürlich der Schwärzungspunkt auf der Photoplatte ebenfalls durch zwei Winkel $(\Theta, \Phi)$ bestimmt. Daß die Menge $B_{\mathrm{v}}$ das visuelle Bild darstellt, muß also noch durch zusätzliche Bestimmungen festgesetzt werden. Als solche eignen sich die vom Auge empfundenen Entfernungen und Winkel. Das heißt, $B_{\mathrm{v}}$, versehen mit der Metrik der kürzesten Bogenlänge und der üblichen Winkelmessung (definiert durch das innere Produkt im Tangentenraum), charakterisiert das visuelle Bild vollständig, da dadurch $(\Theta, \Phi)$ als Punkt der Einheitskugel festgelegt ist.

Es ist anschaulich klar, daß die Menge $B_{\mathrm{v}}$ durch die Emissions- und Absorptionsverhältnisse $W_{\mathrm{E}}$ und $W_{\mathrm{A}}$ und durch den Raum-Zeit-Punkt $X$ der Beobachtung bestimmt sein muß, d. h., $B_{\mathrm{v}} = M_{\mathrm{v}}(X, W_{\mathrm{E}}, W_{\mathrm{A}})$. Es wird jetzt gezeigt, wie $B_{\mathrm{v}}$ formal bestimmt werden kann.

Dazu wird zunächst die Menge $B_0$ von Raum-Zeit-Punkten von $W_{\mathrm{E}}$ gesucht, deren Lichtsignale zur Zeit $T$ bei einem Beobachter in $(X_1, X_2, X_3)$ eintreffen, wenn man von der Möglichkeit der Absorption absieht. Es ergibt sich

$$B_0 = W_{\mathrm{E}} \cap \{x \mid t \leqq T, \ \sum_{l=1}^{3} (x_l - X_l)^2 - c^2 (t-T)^2 = 0\}. \tag{2}$$

Es ist $B_0 = M_0(X, W_{\mathrm{E}})$ mit $X \equiv (X_1, X_2, X_3, T)$. Die Weltlinien der Lichtimpulse zwischen Emission und Beobachtung in $X$ sind durch

$$B_1 = M_1(x, X) \equiv \left\{ \hat{x} \mid \hat{x}_l = x_l + \frac{X_l - x_l}{T-t} (\hat{t} - t), \ T \geqq \hat{t} \geqq t \right\} \tag{3}$$

mit $x \in B_0$ gegeben.

Damit wird die Menge aller Raum-Zeit-Punkte, die Weltpunkte des emittierenden Teils $W_E$ von $W(J)$ sind, die so liegen, daß das Lichtsignal vom absorbierenden Teil $W_A$ von $W(J)$ nicht absorbiert wird und von denen aus ein Lichtsignal den Punkt $X_1$, $X_2$, $X_3$ zur Zeit $T$ erreicht, gegeben durch:

$$B_2 = M_2(X, W_E, W_A) \equiv \{x \mid x \in B_0, M_1(x, X) \cap W_A \subset \{x\}\}. \tag{4}$$

Die von den Punkten von $B_2$ ausgehenden Lichtsignale ergeben also in $X$ ein Bild des Körpers $\Sigma$, das z. B. mit einem Auge wahrgenommen oder mit einer Kugelkamera mit kleiner Öffnung (Lochkamera) photographiert werden kann, wobei natürlich vorausgesetzt wird, daß die Kamera nicht durch $W_A$ gestört wird. Nach den einleitenden Bemerkungen wird man daher folgende Teilmenge $B_v$ der Einheitskugel als visuelles momentanes Bild ansehen:

$$B_v = M_v(X, W_E, W_A) \equiv \{\Omega \mid \Omega \equiv (\Theta, \Phi),\ \Theta = \vartheta(x_1, t),\ \Phi = \varphi(x_2, x_3),\ x \in B_2\}. \tag{5}$$

Dabei wird der physikalisch sinnlose Fall $X \in B_2$ ausgeschlossen, und die Funktionen $\vartheta$ und $\varphi$ werden wie folgt definiert:

$$\vartheta(x_1, t) = \arc\cos \frac{x_1 - X_1}{c(T-t)} \tag{6}$$

und $\varphi(x_1, x_3) =$

$$\begin{cases} 0 \text{ für } (x_2, x_3) = (X_2, X_3), \\ \Delta(x_3 - X_3) \arccos \dfrac{x_2 - X_2}{\sqrt{\sum\limits_{l=2}^{3} (x_l - X_l)^2}} + \\ + \pi(1 - \Delta(x_3 - X_3)) \quad \text{für } (x_2, x_3) \neq (X_2, X_3), \end{cases} \tag{7}$$

wobei arc cos den Hauptwert bedeutet, und $\Delta(\lambda) = 1$ ist für $\lambda \geqq 0$ und $\Delta(\lambda) = -1$ für $\lambda < 0$.

Anschaulich stellt $\Theta$ den Polarwinkel des Lichtstrahles dar, gemessen gegen eine Achse, die parallel zur $x_1$-Achse ist und durch $(X_1, X_2, X_3)$ geht; $\Phi$ ist der Azimut, gemessen gegen eine zur $x_2$-Achse parallele Gerade durch den Punkt $(X_1, X_2, X_3)$.

Der vom Auge empfundene Abstand zweier Bildpunkte ist (wie schon erwähnt) die kürzeste Bogenlänge. Sie soll mit $\varrho_v$ bezeichnet werden, und es ist:

$$\begin{aligned} &\varrho_v(\Omega, \hat{\Omega}) \\ &= \arccos[\sin\Theta \sin\hat{\Theta} \cos(\Phi - \hat{\Phi}) + \cos\Theta \cos\hat{\Theta}]. \end{aligned} \tag{8}$$

### *1.3. Das Bild der Plattenkamera*

Neben dem visuellen Bild wurde in der Literatur auch der Fall diskutiert (vgl. [5]), daß ein Objekt mit einer Plattenkamera (mit sehr kleiner Öffnung und momentanem Verschluß) photographiert wird. Die Platte der Kamera wird dabei vorgestellt als in einer Ebene liegend, die durch den Punkt $X_j + n_j r$ geht $(\Sigma n_j^2 = 1)$ und senkrecht auf $n_j$ steht. $n_j$ sei dabei durch das Winkelpaar $(\Theta_0, \Phi_0)$ bestimmt. Das Plattenbild kann also aufgefaßt werden als Menge $B_p$ von komplexen Zahlen mit der üblichen Metrik (hier mit $\varrho_p$ bezeichnet) und Winkelmessung. $B_p$ hängt neben $X$, $W_E$, $W_A$ auch noch von den drei Größen $\Theta_0$, $\Phi_0$ und $r$ ab, die die Kamera charakterisieren. Der Zusammenhang zwischen visuellem Bild und Plattenbild ist durch die Lichtstrahlen aus $X$ selbst gegeben, also durch zentrale Projektion einer Halbkugel auf eine Ebene. Das heißt, nur derjenige Teil von $B_v$, der in einer Halbkugel mit dem Pol $(\Theta_0, \Phi_0)$ liegt, trägt zum Bild $B_p$ bei. Die Menge $B_p$ ist dabei gegeben als

$$\begin{aligned} B_p &= M_p(r, \Theta_0, \Phi_0, X, W_E, W_A) \\ &\equiv \{z \mid z = z_1 + i z_2,\ z_j = h_j(\Theta, \Phi),\ (\Theta, \Phi) \in B_v\} \end{aligned} \tag{9}$$

mit

$$\begin{aligned} h_1 &= r[\cos\Theta \sin\Theta_0 - \sin\Theta \cos\Theta_0 \cos(\Phi - \Phi_0)] \\ &\cdot [\cos\Theta \cos\Theta_0 + \sin\Theta \sin\Theta_0 \cos(\Phi - \Phi_0)]^{-1} \end{aligned} \tag{10}$$

und

$$\begin{aligned} h_2 &= r \sin\Theta \sin(\Phi - \Phi_0) \\ &\cdot [\cos\Theta \cos\Theta_0 + \sin\Theta \sin\Theta_0 \cos(\Phi - \Phi_0)]^{-1}. \end{aligned}$$

Die durch $h = h_1 + i h_2$ gegebene Abbildung einer Halbkugel auf die $z$-Ebene ist eineindeutig, aber nicht winkeltreu (und nicht längentreu), also nicht konform. Nur in hinreichend kleinen Umgebungen von $z = 0$ und $(\Theta, \Phi) = (\Theta_0, \Phi_0)$ sind die Bilder $B_v$ und $B_p$ ähnlich. Daß $B_p$ mit einer Plattenkamera tatsächlich photographiert werden kann, setzt natürlich voraus, daß die Kamera durch $W_A$ nicht gestört wird.

### *1.4. Das Bild eines Körpers für einen unendlich fernen Beobachter*

Von WEISSKOPF wurde in [4] folgende Definition des Begriffs „Bild" gegeben: „Ein Bild eines Objektes ist eine Menge von Lichtimpulsen, die an jeweils verschiedenen Punkten des Objektes entspringen, die sich in derselben Richtung fortpflanzen und zu einer bestimmten Zeit in einer Ebene liegen, die senkrecht zur Fortpflanzungsrichtung ist.“ Als der zwischen zwei Lichtstrahlen vom Beobachter „empfundene“ Abstand $\varrho_\infty$ wird der Euklidische Abstand zweier Punkte der Ebene genommen, in der sich die Lichtimpulse gleichzeitig befinden. Das so definierte Bild wird mit $B_\infty$ bezeichnet.

Es wird jetzt behauptet, daß sich diese Definition als Grenzfall des visuellen Bildes ergibt für den Fall, daß der Beobachter längs einer Geraden „ins Unendliche“ rückt.

Diese Behauptung ist ohne weiteres anschaulich klar, jedoch wird für später die genaue Form des Grenzüberganges gebraucht, weshalb er hier durchgeführt werden soll.

---

Dazu geht man von einer zur Definition des visuellen Bildes in 1.2 äquivalenten Form aus: Man kann nämlich statt $B_\mathrm{v}$ auch die Menge $\hat{B}_\mathrm{v}$ der Lichtimpulse betrachten, die sich auf einer Kugel vom Radius $R$ um $(X_1, X_2, X_3)$ befinden und die zur Zeit $T$ in $(X_1, X_2, X_3)$ eintreffen. $\hat{B}_\mathrm{v}$ kann also aufgefaßt werden als eine Menge von Raum-Zeit-Punkten mit

$$\hat{B}_\mathrm{v} = \left\{ x \mid x_j = X_j + R\, n_j(\Theta, \Phi),\ t = T - \frac{R}{c}, \quad (\Theta, \Phi) \in B_\mathrm{v} \right\}, \tag{11}$$

wobei $n_j$ der Einheitsvektor in Richtung $(\Theta, \Phi)$ ist. Es ist $\hat{B}_\mathrm{v} = \hat{M}_\mathrm{v}(R, X, W_\mathrm{E}, W_\mathrm{A})$. (Dabei wird natürlich stillschweigend vorausgesetzt, daß die Zeit der Emission $\tilde{t}$ kleiner ist als $T - R/c$. Denn anderenfalls könnte ein Lichtstrahl von $x \in \hat{B}_\mathrm{v}$ nach $X$ mehr als nur einen Punkt mit $W_\mathrm{A}$ gemeinsam haben. Die obige Voraussetzung wird im folgenden immer gemacht.)

Sei $k_j$ nun ein Einheitsvektor, dann wird behauptet, daß

$$B_\infty = \lim_{\lambda \to \infty} \hat{M}_\mathrm{v}(R + \lambda,\ X_j + k_j \lambda,\ T + \lambda/c,\ W_\mathrm{E}, W_\mathrm{A}\} \tag{12}$$

gilt.

Zum Beweis schreibt man sich die explizite Form von $\hat{B}_\mathrm{v}$ auf. Es ist

$$\hat{B}_\mathrm{v} = \Big\{ x \mid t = T - \frac{R}{c},\ x_j = X_j + R\,\frac{\tilde{x}_j - X_j}{c(T - \tilde{t})},\ \tilde{t} \leqq T - \frac{R}{c}, \tag{13}$$
$$\sum_{j=1}^{3} (\tilde{x}_j - X_j)^2 - c^2(\tilde{t} - T)^2 = 0,\ \tilde{x} \in W_\mathrm{E},\ M_1(\tilde{x}, X) \cap W_\mathrm{A} \subset \{\tilde{x}\} \Big\}.$$

Durch Ausführen des Grenzüberganges ergibt sich nach (12) und (13)

$$\lim_{\lambda \to \infty} \hat{B}_\mathrm{v} = \Big\{ x \mid t = T - \frac{R}{c},\ x_j = \tilde{x}_j + k_j c \left(T - \frac{R}{c} - \tilde{t}\right),\ \tilde{t} \leqq T - \frac{R}{c},\ \sum_{j=1}^{3} k_j(\tilde{x}_j - X_j) - c(\tilde{t} - T) = 0, \tag{14}$$
$$\tilde{x} \in W_\mathrm{E},\ M_{1\infty}(\tilde{x}, k) \cap W_\mathrm{A} \subset \{\tilde{x}\} \Big\},$$

wobei $k = (k_1, k_2, k_3)$ und

$$M_{1\infty}(\tilde{x}, k) = \{\hat{x} \mid \hat{x}_l = \tilde{x}_l + k_l c(\hat{t} - \tilde{t}),\ \tilde{t} \leqq \hat{t}\} \tag{15}$$

ist. Die rechte Seite von (14) läßt sich auch so schreiben:

$$\left\{ x \mid t = T - \frac{R}{c},\ x_j = \tilde{x}_j + k_j c(t - \tilde{t}),\ \tilde{t} \leqq t,\ \sum_{j=1}^{3} k_j x_j = a,\ \tilde{x} \in W_\mathrm{E},\ M_{1\infty}(\tilde{x}, k) \cap W_\mathrm{A} \subset \{\tilde{x}\} \right\}. \tag{15'}$$

Dabei ist $a = \Sigma\, k_j(X_j - k_j R)$. Formel (15′) entspricht aber genau der am Anfang dieses Abschnittes gegebenen Definition, d. h., $B_\infty = \lim_{\lambda \to \infty} \hat{B}_\mathrm{v}$, und $B_\infty = M_\infty(k, a, t, W_\mathrm{E}, W_\mathrm{A})$. Ferner ist klar (und kann auch rechnerisch gezeigt werden), daß die Metrik der kürzesten Bogenlänge und die Winkelmessung von $\hat{B}_\mathrm{v}$ in die von $B_\infty$ übergehen. Wie schon in der ursprünglichen Definition formuliert, stellt $B_\infty$ eine Menge von Lichtimpulsen dar, die sich zur Zeit $t$ in der Ebene $E(k, a) = \{(x_1, x_2, x_3) \mid \Sigma\, k_j x_j = a\}$ befinden. Die gleiche Menge von Lichtimpulsen befindet sich zur Zeit $t + \tau$ in der Ebene $E(k, a + c\tau)$. In diesem Sinne kann man also alle Bilder $M_\infty(k, a + c\tau, t + \tau, W_\mathrm{E}, W_\mathrm{A})$ als äquivalent ansehen.

Von der Metrik in der Ebene $E(k, a)$ soll noch eine für später wichtige Eigenschaft angegeben werden: Sind $x$ und $\hat{x}$ zwei Punkte, die in $E(k, a)$ liegen und für die $t = \hat{t}$ ist, so ist die Metrik in $B_\infty$ gegeben durch

$$\varrho_\infty{}^2(x, \hat{x}) = \sum_{j=1}^{3} (x_j - \hat{x}_j)^2 - c^2 (t - \hat{t})^2. \qquad (16)$$

Liegt $x$ auf dem Lichtstrahl $M_{1\infty}(\overset{1}{x}, k)$ und $\hat{x}$ auf dem Lichtstrahl $M_{1\infty}(\overset{2}{x}, k)$ und ist $\tilde{\overset{1}{x}} \in M_{1\infty}(\overset{1}{x}, k)$ und $\tilde{\overset{2}{x}} \in M_{1\infty}(\overset{2}{x}, k)$, so ist

$$\varrho_\infty(x, \hat{x}) = \varrho_\infty(\tilde{\overset{1}{x}}, \tilde{\overset{2}{x}}). \qquad (17)$$

Der Beweis von Formel (17) ist elementar. Diese Beziehung ist für das Transformationsverhalten des Bildes $B_\infty$ wichtig.

### *1.5. Andere mögliche Bilder*

Neben den bisher betrachteten Bilddefinitionen könnte man natürlich noch andere inäquivalente Bilddefinitionen (d. h. solche, die zu untereinander nicht ähnlichen Bildern führen) untersuchen. Aus den bisher betrachteten Beispielen läßt sich (induktiv) ablesen, daß man jedes irgendwie gewonnene Bild als 2-dimensionale Mannigfaltigkeit auffassen kann, deren Metrik und Winkelmessung die Art des Rezeptors bestimmt, während die Abhängigkeit der Bildmenge von $W_{\mathrm{E}}$ und $W_{\mathrm{A}}$ die Art des optischen Instrumentes angibt, mit dem beobachtet wird. Diese allgemeinen Betrachtungen sollen jedoch hier nicht weiter verfolgt werden. Wir begnügen uns vielmehr mit dem Hinweis, daß ein praktisch so wichtiger Spezialfall wie die Radarbeobachtung (im einfachsten Falle) bereits mit dem bisher entwickelten Formalismus behandelt werden kann: Die Aussendung der Radarstrahlen bestimmt $W_{\mathrm{E}}$ bei gegebenen Weltlinien $W(J)$. Da nun nicht alle Radarstrahlen gleichzeitig zum Beobachter zurückkehren, entsteht das Radarbild als Überlagerung einer gewissen Menge von Momentbildern. Ein Spezialfall dazu ist in [10] behandelt worden.

## 2. Transformation der Bilder bei Lorentz-Transformationen

### *2.1. Bezeichnungen*

Bisher waren Bilder und damit zusammenhängende Mengen nur in einem LORENTZ-System $S$ untersucht worden. Das Ziel dieses Paragraphen ist es, eine Aussage darüber zu machen, welches Bild $B_{\mathrm{i}}^{(\prime)}$ ein Beobachter in $X'$ im System $S'$ wahrnimmt, wenn ein im System $S$ befindlicher Beobachter im zu $X'$ LORENTZ-transformierten Punkt $X$ das Bild $B_{\mathrm{i}}$ wahrnimmt; $\mathrm{i} = \mathrm{v}, \mathrm{p}, \infty$.

Die LORENTZ-Transformation wird im folgenden mit $L$ abgekürzt, d. h., $x' = L\,x$. Ist eine Menge $A$ in $S$ gegeben, so bedeutet $A'$ die Menge

$$A' = \{x' \mid x' = L\,x, \quad x \in A\}. \qquad (18)$$

Ist $A$ definiert als

$$A = \{x \mid F_j(x) = 0,\ j = 1, \ldots, N\}, \qquad (19)$$

so ist also $A'$ definiert als

$$A' = \{x' \mid F_j(L^{-1} x') = 0,\ j = 1, \ldots, N\}. \quad (20)$$

Unter Ausnutzung der Transformationseigenschaften läßt sich das System $F_j(L^{-1} x') = 0$, $j = 1, \ldots, N$ überführen in ein äquivalentes System $F_j{}'(x) = 0$, $j = 1, \ldots, N$.

In diesem Sinne also ist

$$W'(\varkappa) = \{x' \mid x_l{}' = \alpha_l{}'(t' \mid \varkappa)\}, \qquad (21)$$

wobei $\alpha_l{}'$ eine Lösung der Bewegungsgleichungen in $S'$ ist. Analog ergibt sich $W_{\mathrm{E}}{}'(\varkappa)$, $W_{\mathrm{A}}{}'(\varkappa)$, $W'(J)$, $W_{\mathrm{E}}{}'$ und $W_{\mathrm{A}}{}'$. Für $B_0{}'$ erhält man

$$B_0{}' = W_{\mathrm{E}}{}' \cap \{x' \mid \sum_{l=1}^{3} (x_l{}' - X_l{}')^2 - c^2 (t' - T')^2 = 0, \quad t' \leqq T'\}, \qquad (22)$$

und es ist $B_0{}' = M_0(X', W_{\mathrm{E}}{}')$.

Ganz analog ergibt sich für die Lichtstrahlen $B_1{}' = M_1(x', X')$ mit $x' \in B_0{}'$, und für $B_2{}'$ erhält man $B_2{}' = M_2(X', W_{\mathrm{E}}{}', W_{\mathrm{A}}{}')$.

Zur Bezeichnung der transformierten Bilder ist zu bemerken, daß diese mit $B_{\mathrm{i}}^{(\prime)}$, $\mathrm{i} = \mathrm{v}, \mathrm{p}, \infty$ und nicht mit $B_{\mathrm{i}}{}'$ bezeichnet werden, da sie nicht nach dem Schema von (18) gebildet werden. Dies gilt, wie sich in 2.4 zeigen wird, auch für $B_\infty^{(1)}$.

### *2.2. Der Fall des visuellen Bildes*

Will man die Bilder, die ein in $S$ ruhender und ein in $S'$ ruhender Beobachter sehen, vergleichen, so ist damit bereits festgelegt, was unter dem transformierten Bild $B_{\mathrm{v}}^{(\prime)}$ zu verstehen ist: Nämlich, da die Augen in $S$ und $S'$, mit den jeweiligen Maßstäben gemessen, gleich sind, und wegen der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit, entsteht $B_{\mathrm{v}}^{(\prime)}$ aus $B_2{}'$ genauso wie $B_{\mathrm{v}}$ aus $B_2$, d. h., durch die gleiche Funktion $\omega$ mit $\omega(x) = (\vartheta(x_1, t), \varphi(x_2, x_3))$ und $\vartheta$, $\varphi$ nach (6) und

(7). Das heißt, $B_{\mathrm{v}}^{(\prime)}$ wird definiert als

$$B_{\mathrm{v}}^{(\prime)} = \{\Omega \mid \Omega = \omega(x'), x' \in B_2'\}. \qquad (23)$$

Da $B_2' = M_2(X', W_{\mathrm{E}}', W_{\mathrm{A}}')$ ist, ist also auch $B_{\mathrm{v}}^{(\prime)} = M_{\mathrm{v}}(X', W_{\mathrm{E}}', W_{\mathrm{A}}')$. Die empfundene Länge und der empfundene Winkel werden in $B_{\mathrm{v}}^{(\prime)}$ beide durch die gleiche Vorschrift gemessen wie in $B_{\mathrm{v}}$, also die Länge als kürzeste Bogenlänge.

### 2.3. Das Bild der Plattenkamera

Zunächst soll vorausgesetzt werden, daß $L$ eine spezielle LORENTZ-Transformation ist, daß also $S$ und $S'$ achsenparallel sind, und es soll angenommen werden, daß sich $S'$ in Richtung der positiven $x_1$-Achse von $S$ bewegt. Der allgemeine Fall ergibt sich dann daraus leicht, wird aber nicht explizit behandelt. Eine Plattenkamera, deren Verschlußort und -zeit in $S'$ durch $X'$ gegeben ist, ist wieder durch die Parameter $r'$, $\Theta_0'$, $\Phi_0'$ gekennzeichnet, und es entsteht die Frage, wie $r'$, $\Theta_0'$, $\Phi_0'$ zu wählen sind, wenn die Kamera in $S$ durch $r$, $\Theta_0$, $\Phi_0$ gekennzeichnet ist und man in $S'$ mit der „gleichen" Kamera wie in $S$ fotografieren will. Gleich kann einmal heißen, wie im Falle der visuellen Beobachtung, gleich gebaut, oder aber auch koinzidierend.

Gleich gebaut ist die Kamera in $S'$ dann, wenn $r' = r$, $\Theta_0' = \Theta_0$ und $\Phi_0' = \Phi_0$ gesetzt wird, und dieser Fall entspricht dem beim visuellen Bilde allein betrachteten. $B_{\mathrm{p}}^{(\prime)}$ und $B_{\mathrm{v}}^{(\prime)}$ gehen also für gleich gebaute Kameras auseinander durch dieselbe Funktion $h$ hervor, die $B_{\mathrm{v}}$ in $B_{\mathrm{p}}$ überführt. Das heißt,

$$B_{\mathrm{p}}^{(\prime)} = \{z' \mid z' = h(\Omega'), \Omega' \in B_{\mathrm{v}}^{(\prime)} \cap E_{1/2}\}. \qquad (24)$$

Dabei ist $E_{1/2}$ wieder die Halbkugel mit dem Pol ($\Theta_0$, $\Phi_0$), und es gilt $B_{\mathrm{p}}^{(\prime)} = M_{\mathrm{p}}(r, \Theta_0, \Phi_0, X', W_{\mathrm{E}}', W_{\mathrm{A}}')$.

Der Fall der koinzidierenden Kameras ist wesentlich komplizierter, da die Transformation der Plattenebene und die LORENTZ-Kontraktion von $r$ berücksichtigt werden müssen. Da außerdem $B_{\mathrm{p}}^{(\prime)}$ das Analogon zu $B_{\mathrm{v}}^{(\prime)}$ ist und da das Photographieren mit koinzidierenden Kameras bei Kugelkameras gar nicht möglich ist, soll dieser Fall hier auch nicht weiter verfolgt werden. Es ist aber zu bemerken, daß für $\Theta_0 = \Theta_0' = \pi/2$ die Kameraebenen koinzidieren.

### 2.4. Das Bild des unendlich fernen Beobachters in $S'$

Zunächst ist klar, daß die nach (18) gebildete Menge $B'_\infty$ nicht das Bild des unendlich fernen Beobachters in $S'$ (das mit $B_\infty^{(\prime)}$ bezeichnet wird) sein kann, da die Ereignisse von $B'_\infty$ nicht gleichzeitig sind. Es wird jetzt wieder nur der Fall einer speziellen LORENTZ-Transformation wie in 2.3 betrachtet, da der allgemeine Fall auf diesen zurückgeführt werden kann, was aber ebenfalls nicht explizit durchgeführt werden soll. Es gilt dann der Satz: Dieselbe Menge von Lichtimpulsen, die in $S$ zur Zeit $t$ in $E(k, a)$ liegt, liegt in $S'$ zur Zeit $t'$ in $E(k', a')$, wenn $k, a, t$ und $k', a', t'$ wie folgt zusammenhängen:

$$k_1' = K D^{-1}(k_1 - v/c), \quad k_j' = D^{-1} k_j, \; j = 2, 3 \qquad (25)$$

$$K^{-2} = 1 - v^2/c^2, \qquad D = D(k_1) = K(1 - k_1 v/c) = D^{-1}(-k_1'),$$

und die Transformation von $a$ und $t$ ergibt sich so: Ist $Y \in (E(k, a), t)$ und $Y' = L Y$, dann sei

$$a' = \sum_{j=1}^{3} k_j' Y_j' \qquad (26)$$

und $t'$ gleich der Zeitkomponente von $Y'$. Dieser leicht zu beweisende Sachverhalt legt folgende Definition nahe:

$$B_\infty^{(\prime)} = M_\infty(k', a', t', W_{\mathrm{E}}', W_{\mathrm{A}}') \qquad (27)$$

mit der gleichen Metrik $\varrho_\infty$ (und Winkelmessung) wie in $B_\infty$. Da man für jedes $Y \in (E(k, a), t)$ andere $a'$, $t'$ erhält, ist $B_\infty^{(\prime)}$ nicht eindeutig definiert. Man kann aber zeigen, daß $B_\infty^{(\prime)}$ bis auf Äquivalenzen eindeutig ist (vgl. 1.4, Schluß).

Das Bild $B_\infty$ ließ sich als Limes von visuellen Bildern auffassen, und es entsteht die Frage, ob sich auch $B_\infty^{(\prime)}$ als Limes von visuellen Bildern darstellen läßt. Dies ist der Fall, und es gilt der Satz: Ist

$$B_\infty = \lim_{\lambda \to \infty} \hat{M}_{\mathrm{v}}(R + \lambda, X_j + k_j \lambda, T + \frac{\lambda}{c}, W_{\mathrm{E}}, W_{\mathrm{A}}),$$

so ist (bis auf Äquivalenzen)

$$B_\infty^{(\prime)} = \lim_{\lambda' \to \infty} \hat{M}_{\mathrm{v}} \left(R' + \lambda', X_j' + k_j' \lambda', T' + \frac{\lambda'}{c}, W_{\mathrm{E}}, W_{\mathrm{A}}\right)$$

mit $\lambda' = \lambda D$ und $R' = R D$. (28)

Da der Beweis leicht ist, soll er hier nicht angegeben werden. Andere Limites, z. B. mit $R' + \alpha\lambda'$, $\alpha \neq 1$ ergeben keine zu $B_\infty^{(\prime)}$ äquivalente Beschreibung.

Dieser Satz spielt eine große Rolle bei der physikalischen Deutung des Verhältnisses der Metrik in $B_\infty$ und $B_\infty^{(\prime)}$. Aus Formel (17) folgt nämlich sofort die Invarianz der Metriken, worauf in 3.4 noch ausführlich eingegangen wird.

Bisher war bei der Definition von $B_\infty^{(\prime)}$ nicht die Rede, mit welcher Kamera das Bild $B_\infty^{(\prime)}$ aufgenommen werden soll, bzw. wie die Relation der Kameras von $B_\infty$ und $B_\infty^{(\prime)}$ ist. Beim visuellen Bilde wie beim Plattenbilde war zuerst festgesetzt worden, daß das transformierte Bild mit der gleichen Kamera aufzunehmen sei, und danach war das transformierte Bild definiert worden. Beim Bild des unendlich fernen Beobachters wurde gemäß der Definition von WEISSKOPF umgekehrt vorgegangen. Es soll jetzt geklärt werden, mit welchen Kameras $B_\infty$ und $B_\infty^{(\prime)}$ aufgenommen werden.

Zunächst ist festzustellen, daß für die Metriken $\hat{\varrho}_v\{R+\lambda\}$ und $\hat{\varrho}_v\{R'+\lambda'\}$ in $\hat{M}_v(R+\lambda,\ldots)$ und $\hat{M}_v(R'+\lambda',\ldots)$ gilt

$$\hat{\varrho}_v\{R+\lambda\} = (R+\lambda)\cdot\text{Winkel}$$

und

$$\hat{\varrho}_v\{R'+\lambda'\} = (R'+\lambda')\cdot\text{Winkel}.$$

Will man also beide Bilder metrisch vergleichen, so müßten die Faktoren vor den Winkeln gleich sein. Sind sie es nicht, wie in unserem Falle, so heißt das, daß nicht mit gleich dimensionierten Kugelkameras photographiert wird. Oder anders ausgedrückt, bei einem metrischen Vergleich der Bilder $\hat{M}_v(R+\lambda,\ldots)$ und $\hat{M}_v(R'+\lambda',\ldots)$ müssen alle Längen in $\hat{M}_v(R'+\lambda',\ldots)$ mit dem Faktor $D(-k_1')$ multipliziert werden, um vergleichbare Aufnahmen zu bekommen, denn $R'+\lambda' = D(k_1)\,(R+\lambda)$.

Dieses Radiusverhältnis gilt auch im Limes $\lambda\to\infty$, und die gewonnenen Resultate gelten auch für $B_\infty$ und $B_\infty^{(\prime)}$. Bei metrischen Vergleichen von $B_\infty$ und $B_\infty^{(\prime)}$ hat man also darauf zu achten, daß beide Bilder mit verschiedenen Kugelkameras aufgenommen werden. Diese Tatsache klärt auch einen scheinbaren Widerspruch zwischen dem Beweis von WEISSKOPF in [4] und dem von TERRELL in [3], worauf in 3.4 noch einmal eingegangen wird.

## 3. Transformationsformeln für Bilder

### *3.1. Vorbemerkung*

Im Paragraph 2 war untersucht worden, welche Bilder jeweils von momentan koinzidierenden Beobachtern in verschiedenen Systemen mit der gleichen Kamera photographiert werden. In diesem Paragraphen wird nun untersucht, wie sich die Bilder selbst, als Punktmengen aufgefaßt, transformieren, und ob die Transformationen z. B. konform sind oder nicht. Es werden dabei nur die schon in 2.3 benutzten speziellen LORENTZ-Transformationen untersucht, da die Drehungen auf jeden Fall ähnliche Bilder ergeben.

### *3.2. Transformationen der visuellen Bilder*

Ein Lichtimpuls, der in $S$ in $B_v$ einen Punkt $(\Theta, \Phi)$ ergibt, ergibt in $S'$ in $B_v^{(\prime)}$ einen Punkt $(\Theta', \Phi')$ und $\Theta$ und $\Theta'$ und $\Phi$ und $\Phi'$ hängen nach den Aberrationsformeln zusammen (die sich auch direkt aus (6) und (7) ergeben):

$$\cos\Theta = \frac{\cos\Theta' - v/c}{1 - v/c\,\cos\Theta'} \tag{29}$$

und

$$\Phi = \Phi'.$$

Aus (29) folgt, daß die Abbildung $L_v: B_v \to B_v^{(\prime)}$ mit $L_v(\Theta, \Phi) = (\Theta', \Phi')$ eineindeutig und analytisch ist. Die Umkehrung wird durch $v\to -v$ erhalten (vgl. [3]).

Man betrachtet jetzt statt der Metrik $\varrho_v$ der kürzesten Bogenlänge die dazu äquivalente Metrik $\varrho_{v1}$ der Sehnenlänge auf der Einheitskugel. Der Zusammenhang zwischen beiden ist gegeben durch

$$\varrho_{v1} = 2\sin(\varrho_v/2). \tag{30}$$

Mit Formel (8) erhält man daraus

$$\varrho_{v1}^2(\Omega, \hat{\Omega}) = 2[1 - \cos\Theta\cos\hat{\Theta} - \sin\Theta\sin\hat{\Theta}\cdot\cos(\Phi - \hat{\Phi})]. \tag{31}$$

Von $\varrho_{v1}$ gilt der Satz: Gehen $\Omega'$ und $\hat{\Omega}'$ aus $\Omega$ und $\hat{\Omega}$ durch (29) hervor, so ist

$$\varrho_{v1}^2(\Omega, \hat{\Omega}) = D^{-1}(\cos\Theta')\,D^{-1}(\cos\hat{\Theta}')\,\varrho_{v1}^2(\Omega', \hat{\Omega}') \tag{32}$$

mit

$$D(\cos\Theta') = K\left(1 - \frac{v}{c}\cos\Theta'\right), \quad K^{-2} = 1 - v^2/c^2. \tag{33}$$

Der Beweis ergibt sich leicht aus (29) und (31). Mit Hilfe des inneren Produktes kann man den Winkel $\gamma$ zwischen zwei Tangentenvektoren $\boldsymbol{t}$ und $\hat{\boldsymbol{t}}$ in $\Omega$, d. h. zwischen zwei Kurven $(\alpha(\tau), \beta(\tau))$ und $(\hat{\alpha}(\tau), \hat{\beta}(\tau))$, die sich in $\Omega$ schneiden, definieren:

$$\gamma = \arccos\frac{\boldsymbol{t}\cdot\hat{\boldsymbol{t}}}{\|\boldsymbol{t}\|\,\|\hat{\boldsymbol{t}}\|}. \tag{34}$$

Der durch die nach (29) transformierten Kurven $(\alpha'(\tau), \beta'(\tau))$ und $(\hat{\alpha}'(\tau), \hat{\beta}'(\tau))$ definierte Winkel sei mit $\gamma'$ bezeichnet. Es gilt der Satz: $\gamma = \gamma'$. Der Beweis ist wieder elementar.

Dieser Satz und die Formel (32) lassen sich zusammenfassen zu dem Satz: Die durch (29) definierte Abbildung der Einheitskugel in sich ist winkeltreu und im Kleinen ähnlich, d. h. konform. Der Dehnungsfaktor im Kleinen ist $D^{-1}(-\cos\Theta)$.

Die physikalischen Konsequenzen werden in Paragraph 4 behandelt.

### 3.3. *Die Transformation des Plattenbildes*

Durch Kombination der Formeln (29) und (10) erhält man die Abbildung $L_p: B_p \rightarrow B_p^{(\prime)}$. Dabei ist $z_1' + i z_2' \equiv z' = L_p(z)$, $z = z_1 + i z_2$ gegeben durch:

$$z_1' = r\,C\,K \sin\Theta_0 \left[ r\cos\Theta_0 + z_1 \sin\Theta_0 - \frac{v}{c}\sqrt{r^2 + |z|^2} \right] - r\,C\cos\Theta_0\,[r\sin\Theta_0 - z_1\cos\Theta_0] \tag{35}$$

und

$$z_2' = r\,C\,z_2 \tag{36}$$

mit

$$C^{-1} = K\cos\Theta_0 \left[ r\cos\Theta_0 + z_1\sin\Theta_0 - \frac{v}{c}\sqrt{r^2 + |z|^2} \right] + \sin\Theta_0\,[r\sin\Theta_0 - z_1\cos\Theta_0]\,. \tag{37}$$

Der physikalische Sinn von $L_p$ ist auch klar: Derselbe Lichtimpuls, der in $S$ auf der Platte der Kamera in $z$ auftrifft, trifft in $S'$ auf der Platte der Kamera in $z'$ auf. Die Abbildung $L_p$ ist nicht konform, denn die Cauchy–Riemannschen Gleichungen sind nicht erfüllt.

### 3.4 *Die Transformation von* $B_\infty$

Wie in den anderen beiden Fällen ist die Abbildungsvorschrift $L_\infty: B_\infty \rightarrow B_\infty^{(\prime)}$ dadurch festgelegt, daß die zugeordneten Punkte $x \in B_\infty$ und $x^{(\prime)} \in B_\infty^{(\prime)}$ vom selben Lichtimpuls erzeugt werden sollen.

Ist $B_\infty = M_\infty(k, a, t, W_E, W_A)$ und $B_\infty^{(\prime)} = M_\infty(k', a', t^{(\prime)}, W_E', W_A')$, so muß also mit $x' = L\,x$ gelten:

$$x_j^{(\prime)} = x_j' + k_j'\,c\,(t^{(\prime)} - t')\,. \tag{38}$$

Damit ergeben sich für die spezielle Lorentz-Transformation die Beziehungen zwischen den räumlichen Koordinaten von $x$ und $x^{(\prime)}$:

$$x_1^{(\prime)} = K(x_1 - v\,t) + k_1'\,c\left(t^{(\prime)} - K\,t + K\frac{v}{c^2}x_1\right), \qquad x_j^{(\prime)} = x_j + k_j'\,c\left(t^{(\prime)} - K\,t + K\frac{v}{c^2}x_1\right), \quad j = 2, 3\,. \tag{39}$$

Durch (39) ist also $L_\infty$ festgelegt.

Für die Metrik in $B_\infty$ und $B_\infty^{(\prime)}$ gilt der Satz:

$$\varrho_\infty(\overset{1}{x}, \overset{2}{x}) = \varrho_\infty(\overset{1(\prime)}{x}, \overset{2(\prime)}{x})\,. \tag{40}$$

Der Beweis kann direkt durch Einsetzen von (39) erfolgen. Einfacher ergibt er sich so: Zunächst ist nach der Definition von $\varrho_\infty$ [Formel (16)] und der Lorentz-Invarianz von $\varrho_\infty$

$$\varrho_\infty(\overset{1}{x}, \overset{2}{x}) = \varrho_\infty(\overset{1'}{x}, \overset{2'}{x})\,. \tag{41}$$

Da aber $x'$ und $x^{(\prime)}$ auf demselben Lichtstrahl liegen, folgt mit Formel (17) die Behauptung.

Die Abbildung $L_\infty$ stellt also eine isometrische Abbildung zweier euklidischer Ebenen aufeinander dar. Daher sind $B_\infty$ und $B_\infty^{\prime}$ kongruent. Nach den Bemerkungen von 2.4, Schluß, darf man aber daraus nicht schließen, daß der Beobachter in $S$ und der in $S'$ mit den gleichen Kameras kongruente Bilder aufnehmen. Vielmehr ist der Bildmaßstab in $S'$ mit $D(-k_1')$ zu multiplizieren, d. h., die Metrik $\varrho_\infty^{(\prime)} = D(-k_1')\,\varrho_\infty$ ist die Metrik, die zu $B_\infty$ vergleichbare Bilder liefert. Dieses Resultat ist in Übereinstimmung mit Formel (32), denn $k_1'$ entspricht $-\cos\Theta'$.

## 4. Folgerungen und Beispiele

### 4.1. *Vorbemerkung*

In der zitierten Literatur wurden bereits mehrere sehr instruktive Beispiele von Bildern schnell fliegender Körper behandelt. Dabei läßt sich der „Mechanismus" der Abbildung direkt verfolgen und ebenso das Zustandekommen bzw. Nichtzustandekommen von Verzerrungen des Bildes. Als unverzerrte Bilder eines Körpers werden dabei die Bilder im Ruhesystem (wenn es ein solches gibt) angesehen. Im folgenden soll nun ein etwas formalerer Weg eingeschlagen werden.

### 4.2. *Allgemeine Methoden*

Es gibt außer dem in Paragraph 2 zur Definition des Bildbegriffes eingeschlagenen Weg keine allgemeine Methode zur Konstruktion des Bildes eines beliebig bewegten Körpers. Das Interesse ist jedoch auch meist nicht auf diesen allgemeinen Fall gerichtet. Vielmehr wird der Fall betrachtet, daß es für einen Körper $\Sigma$ ein (Lorentz-) Ruhesystem $S^r$ gibt und daß der Körper leuchtend und undurchsichtig ist.

Dazu geht man so vor, daß man sich zuerst die Ruhebilder $B_i^r$ verschafft und dann daraus durch die angegebenen Transformationsformeln von Paragraph 3 die Bilder bei gleichförmiger Bewegung. Auf diese Weise lassen sich für Körper mit den angegebenen speziellen Eigenschaften die Bilder in jedem LORENTZ-System gewinnen.

Für die Konstruktion der Ruhebilder kann man auch allgemeine, aber rechnerisch vielleicht nicht immer optimale Methoden angeben.

*4.2.1.:* Beim visuellen Ruhebild in einem Raumpunkt $(X_1, X_2, X_3)$ geht man so vor, daß man in $(X_1, X_2, X_3)$ ein Polarkoordinatensystem einführt und $\Sigma$ in einer bestimmten Lage als Menge von Tripeln $(r, \Theta, \Phi)$ bestimmt. Die Menge

$$B_{\mathrm{v}}^{\mathrm{r}} = \{(\Theta, \Phi) \,|\, (r, \Theta, \Phi) \in \Sigma, \; r > 0\} \qquad (42)$$

ist dann das Ruhebild von $\Sigma$ in der betreffenden Lage und bei Beobachtung von $(X_1, X_2, X_3)$ aus.

*4.2.2.:* Aus dem visuellen Ruhebild läßt sich dann immer durch die Formeln (10) das entsprechende Plattenbild herstellen. Durch Kombinieren der Formeln (6), (7) und (10) und unter Beachtung, daß für das Ruhebild die Lichtkegelbedingung immer erfüllt ist, kann man die Projektion $p\colon \Sigma \to B_{\mathrm{p}}^{\mathrm{r}}$ direkt herstellen, wobei $\Sigma$ als Menge von Punkten $(x_1, x_2, x_3)$ aufgefaßt ist. Das heißt

$$B_p^{\mathrm{r}} = \{z \,|\, z = p(x_1, x_2, x_3), \; (x_1, x_2, x_3) \in \Sigma\}. \qquad (43)$$

$p$ hängt noch von den Parametern $\Theta_0$, $\Phi_0$ und $r$ ab. Für $\Theta_0 = \pi/2$, $\Phi_0 = 3\,\pi/2$ ist

$$p = [-r/(x_3 - X_3)](x_1 - X_1 + i(x_2 - X_2)). \qquad (44)$$

[(44) ist natürlich auch für bewegte Objekte die Abbildungsfunktion unter der Voraussetzung, daß zwischen $x$ und $X$ die Lichtkegelbeziehung besteht.]

Bei Körpern, die von Ebenenstücken begrenzt sind, braucht man nur die Kantenbilder zu bestimmen, die wegen der Kollineationseigenschaften der Projektion wieder Geradenstücke sind.

*4.2.3:* $B_\infty^{\mathrm{r}}$ gewinnt man leicht bei spezieller Wahl des Koordinatensystems, z. B. wenn die Bildebene $E$ als $x_1 = 0$ gewählt wird. Das Bild des als Punktmenge $\Sigma$ gegebenen Körpers ist dann

$$B_\infty^{\mathrm{r}} = \{x \,|\, t = t_0, x_1 = 0, \; (\hat{x}_1, x_2, x_3) \in \Sigma\}, \qquad (45)$$

was durch Drehung in die allgemeine Lage übergeführt werden kann. Nach den Erörterungen von 2.4 und 3.4 sind dann auch die Bilder in anderen LORENTZ-Systemen mit $B_\infty^{\mathrm{r}}$ kongruent, aber sie erscheinen unter einem anderen Winkel. Ist nämlich die Richtung der Lichtstrahlen im Ruhesystem $S^{\mathrm{r}}$ gegeben durch $k'$, so ist sie in einem anderen LORENTZ-System $S$ durch $k$ nach (25) gegeben, wenn beide Systeme durch eine spezielle LORENTZ-Transformation auseinander hervorgehen (der allgemeine Fall ergibt sich daraus durch räumliche Drehungen). Daraus folgt, daß in $S$ der Körper nicht so erscheint, als wenn er dort bei gleicher Lage (also in Richtung $k$) in Ruhe wäre, sondern er erscheint in Richtung $k$ so, als wenn er in Richtung $k'$ in Ruhe wäre. Das heißt, er erscheint gedreht um den Winkel $\arccos(k \cdot k')$ um eine Achse senkrecht zur Ebene, die von $k$ und $k'$ aufgespannt wird. Drückt man $k$ und $k'$ durch Polarwinkel gegen die $x_1$-Achse und Azimut gegen die $x_2$-Achse aus, d. h. $k_1 = \cos\Theta$, $k_1' = \cos\Theta'$ usw., so ist wegen $\Phi = \Phi'$

$$\arccos(k \cdot k') = \Theta - \Theta'. \qquad (46)$$

Mit diesem Resultat, das sich schon in [3] und [4] findet, ist über den unendlich fernen Beobachter alles ausgesagt: Nämlich die LORENTZ-Kontraktion ist nicht sichtbar.

Die physikalische Anwendbarkeit des Bildes $B_\infty$ ist auf Fälle beschränkt, in denen die Entfernung zwischen Objekt und Beobachter sehr groß ist gegen die Ausdehnung des Objektes. Dieser Fall könnte natürlich auch mit dem visuellen Bild direkt behandelt werden, was in 4.3.3 noch angedeutet werden soll.

### *4.3. Beispiele zum visuellen Bild*

*4.3.1. Das Bild einer Kugel (vgl. [7]):* Es soll gezeigt werden, daß das Bild einer bewegten Kugel unverzerrt erscheint. Das Bild einer Kugel im Ruhezustand ist ein Kreis auf der Einheitskugel. Es wird das Bild des Randes betrachtet. Es ist

$$B_{\mathrm{v}}^{\mathrm{r}} = \{(\Theta', \Phi') \,|\, n_1' \cos\Theta' + n_2' \sin\Theta' \cos\Phi' + n_3' \sin\Theta' \sin\Phi' = n', \; n' = \cos\alpha', \; \textstyle\sum n_j'^2 = 1\}. \qquad (47)$$

Der Radius des Kreises (als Sehne der Einheitskugel gemessen) ist gegeben durch $\sin\alpha'$, und $n_j'$ ist ein Vektor in Richtung des Mittelpunktes der abgebildeten Kugel. Man transformiert nun die in (47) auftretende Gleichung mit Hilfe von (29) und erhält

$$n_1 \cos\Theta + n_2 \sin\Theta \cos\Phi + n_3 \sin\Theta \sin\Phi = u \qquad (48)$$

mit

$$n_1 = N^{-1} K\left(n_1' - \frac{v}{c} u'\right), \qquad n_j = N^{-1} n_j', \; j = 2, 3$$
$$u = N^{-1} K\left(u' - \frac{v}{c} n_1'\right), \qquad |u| \leqq 1 \qquad (49)$$
$$N^2 = 1 + \frac{v^2}{c^2} K^2 \left(n_1'^2 + u'^2 - 2\,\frac{c}{v}\, n_1' u'\right).$$

Aus (48) und (49) folgt, daß man wieder einen Kreis erhält. Eine Kugel ohne Oberflächenzeichnung erscheint also vergrößert oder verkleinert, aber unverzerrt. Eine Kugel mit Oberflächenzeichnung oder z. B. eine Schießscheibe erhalten zwar ihren Rand, bekommen aber ein verzerrtes Muster.

*4.3.2. Das Bild einer Geraden:* Das Bild einer Geraden in der $x_2' x_3'$-Ebene parallel zur $x_2'$-Achse ist gegeben durch $\{(\Theta', \Phi') \mid \Theta' = \pi/2,\ \Phi' \in (0, \pi)\}$, d. h. durch einen halben Großkreis. Durch Drehungen gewinnt man den allgemeinen Fall; also ist das Bild jeder Geraden ein halber Großkreis. Da der Großkreisradius gleich 1 ist, folgt nach (47) $\alpha' = \pi/2$, d. h. $n' = 0$.

Das Ruhebild einer Geraden ist also durch

$$\begin{aligned} B_{\mathrm{v}}^{\mathrm{r}} = \{ (\Theta', \Phi') \mid & n_1' \cos \Theta' + n_2' \sin \Theta' \cos \Phi' \\ & + n_3' \sin \Theta' \sin \Phi' = 0 , \\ & \sum n_j'^2 = 1,\ \Theta' \in (\Theta_0, \pi - \Theta_0), \\ & \Phi' \in (\Phi_0, \Phi_0 + \pi),\ \Phi_0 < \pi \} \end{aligned} \tag{50}$$

gegeben. Dabei ist $n_j'$ ein Vektor, der senkrecht auf der durch die Gerade und den Beobachtungsort gebildeten Ebene steht. Das Bild einer bewegten Geraden ergibt sich durch die Formeln (48) und (49) mit $u' = 0$. Man hat also den Satz: Das Bild einer Geraden ist dann und nur dann wieder eine Gerade, wenn $n_1' = 0$ ist, d. h., wenn die Gerade parallel zur $x_1'$-Achse liegt. In allen anderen Fällen erhält man Kreisbögen (vgl. dazu die anschaulichen Beispiele von [7]).

*4.3.3. Die Bilder sehr kleiner Objekte:* Befindet sich ein Objekt in einer Entfernung vom Beobachter, die sehr groß ist gegen die Objektausdehnung, so erscheint das Objekt (praktisch) unter einem Raumwinkel $(\Theta, \Phi)$, und das gesamte Bild ist durch eine Menge $\{(\Theta + \mathrm{d}\Theta, \Phi + \mathrm{d}\Phi)\}$ gegeben, wobei in $\mathrm{d}\Theta$ und $\mathrm{d}\Phi$ immer in der niedrigsten Ordnung zu rechnen ist. Aus der Konformität der Abbildung $L_{\mathrm{v}}$ schließt man sofort auf die Ähnlichkeit der Bilder $B_{\mathrm{v}}$ und $B_{\mathrm{v}}^{(\prime)}$ kleiner Objekte in zwei verschiedenen LORENTZ-Systemen. Aus (32) und (33) oder durch direkte Transformation der Metrik $l_{\mathrm{v}}$ im Kleinen,

$$\begin{aligned} l_{\mathrm{v}}^2 &\equiv \varrho_{\mathrm{v}}^2 (\Omega + \mathrm{d}\Omega_1,\ \Omega + \mathrm{d}\Omega_2) \\ &= (\mathrm{d}\Theta_1 - \mathrm{d}\Theta_2)^2 + \sin^2 \Theta\ (\mathrm{d}\Phi_1 - \mathrm{d}\Phi_2)^2, \end{aligned} \tag{51}$$

gewinnt man den Vergrößerungsfaktor des Bildes $B_{\mathrm{v}}^{(\prime)}$ gegenüber $B_{\mathrm{v}}$, nämlich

$$l_{\mathrm{v}} = l_{\mathrm{v}}' D^{-1}(\cos \Theta') = l_{\mathrm{v}}' K^{-1} \left(1 - \frac{v}{c} \cos \Theta'\right)^{-1} \tag{52}$$

in Übereinstimmung mit den Resultaten im Falle $B_\infty$. Kleine Objekte erscheinen also nicht verzerrt, sondern gedreht.

### *4.4. Beispiele zum Plattenbild*

In der folgenden Diskussion soll nur der Fall behandelt werden, daß die Platte der Kamera in der $x_1 x_2$-Ebene liegt, d. h., es werden die Formeln (35), (36), (37) benutzt für $\Theta_0 = \pi/2$.

*4.4.1. Das Bild einer Geraden:* Die Ruhebilder von Geraden sind im Plattenbild wieder Geraden, wie aus der Kollineationseigenschaft der Projektion folgt. Geraden, die in Ebenen liegen, die auch die $x_1'$-Achse enthalten, geben dabei zur $z_1'$-Achse parallele Geraden im Plattenbild.

Sei nun in $S^{\mathrm{r}}$ eine Gerade durch $z_2' = \alpha z_1' + \beta$ gegeben. Man erhält daraus durch Anwendung der speziellen Transformation die Gleichung

$$z_2 = \alpha K z_1 - \alpha K \frac{v}{c} \sqrt{r^2 + |z|^2} + \beta . \tag{53}$$

Die Gleichung stellt für $\alpha \neq 0$ eine Hyperbel dar. Nur für $\alpha = 0$ gehen die (zur $z_1'$-Achse parallelen) Geraden wieder in solche über. Ein Würfel, parallel zu den Koordinatenachsen in $S^{\mathrm{r}}$, erscheint in S verzerrt. Nur die beiden Begrenzungslinien der Bodenfläche bleiben unverändert.

*4.4.2. Das Plattenbild sehr kleiner Objekte:* Aus der Nichtkonformität der Abbildung $L_{\mathrm{p}}$ folgt, daß man die Schlüsse von 4.3.3 im Falle des Plattenbildes nicht ziehen kann. Man bekommt also im allgemeinen auch im Kleinen unähnliche Bilder in $S^{\mathrm{r}}$ und $S$. Eine Ausnahme bilden natürlich kleine Geradenstücke. Der Ausdruck für die Nichtkonformität ist dabei die Richtungsabhängigkeit des Verzerrungsfaktors im Gegensatz zu Formel (52).

Um diesen Faktor zu bekommen, rechnet man die differentielle Metrik der Platte der Kamera, die mit $l_{\mathrm{p}}'$ in $S^{\mathrm{r}}$ bezeichnet werden soll, in die Koordinaten von $z$ in $S$ um. Dies geschieht einfach durch Einsetzen der differenzierten Form von (35), (36) und (37) für $\Theta_0 = \pi/2$. Dabei treten Größen

$$r_j = z_j (r^2 + |z|^2)^{-1/2}, \quad j = 1, 2 \tag{54}$$

auf, die leicht anschaulich gedeutet werden können, wenn man $r_1$ und $r_2$ mit $|z|$ erweitert. Man erhält

$$r_1 = -\cos \varphi \cos \psi \tag{55}$$

und

$$r_2 = \cos \varphi \sin \psi .$$

Dabei ist $\varphi$ der Winkel zwischen dem einfallenden Lichtstrahl und seiner Projektion längs der $x_3$-Achse in die Plattenebene und $\psi = \pi - \operatorname{arc} z$. $\varphi$ läßt sich in den üblichen Winkeln $(\Theta, \Phi)$ ausrechnen. Es ist

$$\cos^2 \varphi = \cos^2 \Theta + \sin^2 \Theta \cos^2 \Phi . \qquad (56)$$

Bezeichnet man die differentielle Metrik der Platte der Kamera in $S$ mit $l_p$, so ergibt sich

$$\begin{aligned} l_p'^2 = l_p^2 (1+\alpha^2)^{-1} \Big[ & D^2(-\cos\varphi\cos\psi) \\ & -2\,\alpha K \frac{v}{c} \cos\varphi \sin\psi \, D(-\cos\varphi\cos\psi) \qquad (57) \\ & + \alpha^2 \left(1 + K^2 \frac{v^2}{c^2} \cos^2\varphi \sin^2\psi \right) \Big], \end{aligned}$$

wobei $\alpha = \mathrm{d}z_2/\mathrm{d}z_1$ ist. Für die Transformation der Richtung ergibt sich ebenfalls aus der differenzierten Form von (35), (36) und (37) für $\Theta_0 = \pi/2$ die Formel

$$\alpha'^{-1} = \alpha^{-1} K \left(1 + \frac{v}{c} \cos\varphi \cos\psi - \alpha \frac{v}{c} \cos\varphi \sin\psi \right). \qquad (58)$$

Daraus folgt sofort, daß $\alpha = 0$ auch $\alpha' = 0$ zur Folge hat, und für $\alpha = \infty$ und $\varphi = \pi/2$ folgt ebenfalls $\alpha' = \infty$. Da für $\alpha = 0$ und $\varphi = \pi/2$ nach (57) die Ruhelänge größer ist als die Länge in $S$, aber für $\alpha = \infty$ und $\varphi = \pi/2$ beide gleich sind, und da bei der Transformation $L_p$ in beiden Fällen die Richtung erhalten bleibt, entsteht also das Bild in $S$ genau durch LORENTZ-Kontraktion in $z_1$-Richtung aus dem Ruhebild.

Für $\alpha = 0$ und $\psi = 0$ ist $\varphi = \Theta$, und (57) kann mit (52) verglichen werden. Beide Formeln lauten dann

$$l_v = l_v' \, D(-\cos\Theta), \quad l_p = l_p' \, D^{-1}(-\cos\Theta). \qquad (59)$$

Zur anschaulichen Interpretation sei wie bisher festgesetzt, daß $S' = S^r$ das Ruhesystem eines sehr kleinen linearen Maßstabes sei. $l_v'$ und $l_p'$ sind also die Ruhebildlängen. Der Stab bewegt sich nach den Festsetzungen über $S$ und $S^r$ in $S$ von „links" nach „rechts" auf einer Geraden parallel zu $x_1$-Achse und in der $x_1 x_3$-Ebene. Für den visuellen Beobachter erscheint ein „weit von links" herankommender linearer Stab zunächst kleiner als in Ruhe, er scheint allmählich größer zu werden und erscheint, „weit rechts", größer als in Ruhe, und zwar um den Faktor $(1 + v/c) \cdot (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$.

Genau den umgekehrten Effekt sieht der Plattenbeobachter, „weit links" erscheint der kleine lineare Stab verlängert und „weit rechts" verkürzt gegenüber dem Ruhebild. Dieses krasse Beispiel zeigt die starke Abhängigkeit des wahrgenommenen Bildes von der Art des Rezeptors. (Der Effekt läßt sich auch an großen Objekten studieren, vgl. [7].)

### 4.5. *Zur Frage der Sichtbarkeit der* LORENTZ-*Kontraktion*

Aus den Beispielen für die Bilder kleiner linearer Objekte läßt sich entnehmen, daß man diese in spezieller Lage LORENTZ-kontrahiert photographieren kann. Aber es ist die Frage, ob dieser Effekt das trifft, was man üblicherweise unter der Sichtbarkeit der LORENTZ-Kontraktion versteht. Letztere würde vielmehr dann vorliegen, wenn auch die Bilder räumlich ausgedehnter Objekte in Richtung der Bewegung kontrahiert erscheinen. Dieser Effekt aber liegt nicht allgemein vor. Dies läßt sich für das visuelle und für das Plattenbild für große Objekte sofort einsehen, denn Geradenstücke, nicht parallel zur $x_1$-Achse, erscheinen gekrümmt. Die visuellen Bilder kleiner Objekte erscheinen ähnlich, also unverzerrt. Lediglich bei kleinen Objekten im Plattenbild ergibt sich ein überlagerter Verzerrungseffekt, den man in speziellen Fällen als Sichtbarmachung der LORENTZ-Kontraktion auffassen kann: Formel (57) ergibt, wie schon in 4.4.2 gezeigt, für $\alpha = \infty$ und $\varphi = \pi/2$ keine Längenänderung, aber für $\alpha = 0$. Also sind die Bilder kleiner Objekte im Plattenbild gestaucht gegenüber dem Ruhebild in dem angegebenen Spezialfall. Diese Stauchung erscheint als LORENTZ-Kontraktion, die somit in einem speziellen Fall sichtbar ist.